Einbettungen von Kurven und Flächen

Hulek, Klaus

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1996 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.141-151

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

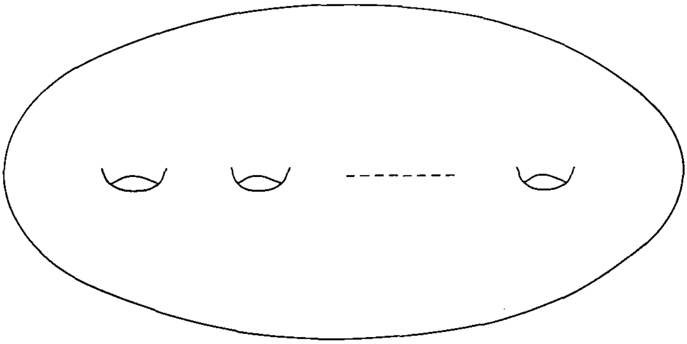
KLAUS HULEK, Hannover

Einbettungen von Kurven und Flächen

Bei dem vorliegenden Aufsatz handelt es sich um die Ausarbeitung meines Vortrags mit dem gleichen Titel, den ich anläßlich der Jahresversammlung der BWG am 14. Juni 1996 in Braunschweig gehalten habe. Ziel dieses Vortrags war es, den Problemkreis und das Hauptergebnis der Arbeit [CFHR], die ich gemeinsam mit F. Catanese, M. Franciosi und M. Reid verfaßt habe, einem breiteren mathematischen Publikum vorzustellen. Auch in diesem Aufsatz möchte ich in erster Linie die zu Grunde liegenden Ideen schildern. Für eine detaillierte Formulierung der Ergebnisse und die technischen Details sei der Leser auf [CFHR] verwiesen.

I Einbettung von Kurven

Im folgenden sei C eine kompakte *Riemannsche Fläche* vom Geschlecht g, d.h. eine 2-dimensionale reelle Fläche mit g Löchern,



die noch zusätzlich eine komplexe Struktur trägt. Jede solche kompakte Riemannsche Fläche kann bekanntlich in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eingebettet werden, wo C dann durch endlich viele Polynomgleichungen beschrieben werden kann. (Diese Aussage ist im wesentlichen äquivalent zum *Riemannschen Existenzsatz* für nicht-triviale meromorphe Funktionen). Damit wird C zu einem Objekt der algebraischen Geometrie und man spricht von einer *projektiven Kurve* (wobei man nun weniger an das reell 2-dimensionale, als das komplex 1-dimensionale Gebilde denkt.)

Es stellt sich nun die Frage, wie Einbettungen in projektive Räume konkret beschrieben werden können. Hierzu betrachten wir einen *Divisor* D auf der Kurve C, d.h. eine formale Summe

$$D = n_1 P_1 + \ldots + n_k P_k; \quad P_i \in C, n_i \in \mathbb{Z}.$$

Denken wir an D als eine Menge von Punkten mit vorgegebenen Null- und Polstellenordnungen, so führt uns dies auf den folgenden Vektorraum von meromorphen Funktionen auf C:

$$H^0(D) = \{f \in \mathcal{M}(C); \quad \mathrm{ord}_{P_i} f \geq -n_i\}.$$

Es ist nicht schwer einzusehen, daß $H^0(D)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist. Es sei

$$h^0(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(D)$$

die Dimension von $H^0(D)$. Wählen wir eine Basis

$$f_0, \ldots, f_N \in H^0(D), \quad h^0(D) = N + 1,$$

so erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_D : \quad & C \longrightarrow \mathbb{P}^N \\ & x \longmapsto (f_0(x) : \ldots : f_N(x)). \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, daß φ eine wohldefinierte holomorphe Abbildung ist. Bis auf eine Koordinatentransformation in $\mathbb{P}^N$ hängt diese Abbildung nur von dem Divisor D ab.

Der *Grad* des Divisors D ist definiert durch

$$\deg D = n_1 + \ldots + n_k.$$

Theorem 1 *Es sei D ein Divisor auf C vom Grad $d \geq 2g + 1$. Dann gilt:*

(i) $h^0(D) = d + 1 - g$,

(ii) φ_D *ist eine Einbettung.*

Beweis. Siehe etwa [Ha, Corollary IV.3.2]. □

Beide Aussagen sind einfache Konsequenzen des Satzes von Riemann-Roch. Genauer gesagt, benötigt man hierzu eigentlich nur den Satz von

Riemann. Aus der ersten Aussage folgt insbesondere die Existenz nichtkonstanter meromorpher Funktionen auf C.

Eine andere Möglichkeit, Abbildungen in projektive Räume zu beschreiben, besteht darin, *Differentialformen* zu verwenden. Wir betrachten hierzu den Vektorraum der globalen (holomorphen) Differentialformen auf C:

$$H^0(K_C) = \{\omega; \omega \text{ ist Differentialform auf } C\}.$$

Formal ist eine Differentialform ω ein Schnitt im Kotangentialbündel von C, oder äquivalent, ein globaler Schnitt der kanonischen Garbe (welche meist mit K_C bezeichnet wird). Lokal ist jede Differentialform ein Ausdruck der Form

$$\omega = f(z)dz$$

wobei z eine Ortsuniformisierende und $f(z)$ eine holomorphe Funktion ist. Für die Dimension von $H^0(K_C)$ gilt

$$h^0(K_C) = g.$$

(Diese Aussage ist der eigentliche Kern des Satzes von Riemann-Roch.) Analog kann man den Raum der k-fachen Differentialformen betrachten:

$$H^0(kK_C) = \{\omega; \omega \text{ ist } k\text{-fache Differentialform auf } C\}.$$

Eine k-fache Differentialform besitzt lokal eine Darstellung der Form

$$\omega = f(z)dz^k.$$

Für die Dimension dieser Räume gilt die Formel

$$(1) \quad h^0(kK_C) = \begin{cases} 0 \text{ für alle } k \geq 1, & \text{falls } g = 0, \\ 1 \text{ für alle } k \geq 1, & \text{falls } g = 1, \\ \left\{ \begin{array}{c} g \text{ für } k = 1 \\ (2k-1)(g-1) \text{ für } k \geq 2 \end{array} \right\}, & \text{falls } g \geq 2. \end{cases}$$

Man beachte, daß C genau dann das Geschlecht 0 hat, falls C die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$ ist, und daß das Geschlecht von C genau dann 1 ist, wenn C ein Torus ist. Im letzten Fall ist $C = \mathbb{C}/\Lambda$ wobei Λ ein *Gitter* in $\mathbb{C}$ ist. Dies ist der wichtige Fall der *elliptischen Kurven.*

Will man Differentialformen benutzen, um Einbettungen in projektive Räume zu konstruieren, so hat dies auf Grund von Formel (1) nur Chancen für $g \geq 2$. Wir erinnern hier noch daran, daß eine Kurve C *hyperelliptisch* heißt, falls sie als 2-blättrige Überlagerung der Riemannschen Zahlenkugel

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dargestellt werden kann. Für $g \leq 2$ ist jede Kurve hyperelliptisch, während die allgemeine Kurve vom Geschlecht $g \geq 3$ nicht hyperelliptisch ist.

Theorem 2 *Es sei C eine Kurve vom Geschlecht $g(C) \geq 2$. Dann gilt*

(i) *Die Abbildung*

$$\varphi_1 = \varphi_{K_C} : \begin{array}{l} C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1} \\ x \longmapsto (\omega_0(x) : \ldots : \omega_{g-1}(x)) \end{array}$$

ist genau dann eine Einbettung, wenn C nicht hyperelliptisch ist.

(ii) *Für $k \geq 3$, bzw. $k \geq 2$ und $g \geq 3$ ist*

$$\varphi_k = \varphi_{kK_C} \; : \; C \mapsto \mathbb{P}^N \quad (N + 1 = (2k-1)(g-1))$$

stets eine Einbettung.

Beweis. Für Aussage (i) siehe etwa [Ha, Proposition IV.5.3]. Aussage (ii) folgt insbesondere auch aus Theorem 1, da der Grad des kanonischen Divisors gleich $2g - 2$ ist. □

An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, daß die obigen Sätze nicht nur für kompakte Riemannsche Flächen, d.h. komplexe algebraische Kurven, sondern ebenso für Kurven gelten, die über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k definiert sind.

II Einbettung von Flächen

Es sei nun S eine kompakte komplexe Fläche (insbesondere ist also S eine reell 4-dimensionale Mannigfaltigkeit). In diesem Fall ist S nicht mehr notwendigerweise projektiv-algebraisch, d.h. S kann nicht immer in einen projektiven Raum eingebettet werden. (Entsprechende Beispiele finden sich bereits in der Klasse der komplex 2-dimensionalen Tori.) Wir nehmen nun im folgenden stets an, daß S eine solche Einbettung besitzt, d.h. eine *projektiv-algebraische Fläche* ist.

In Analogie zum Kurvenfall betrachten wir jetzt den Raum der (holomorphen) 2-Formen auf S:

$$H^0(K_S) = \{\omega; \omega \text{ ist eine 2-Form auf } S\}.$$

Lokal läßt sich jede 2-Form in der Gestalt

$$\omega = f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$$

darstellen, wobei z_1, z_2 ein lokales Koordinatensystem und $f(z_1, z_2)$ eine holomorphe Funktion ist. Ebenso kann man auch hier den Raum der k-fachen 2-Formen

$$H^0(kK_S) = \{\omega; \omega \text{ ist } k\text{-fache 2-Form}\}$$

mit lokaler Darstellung

$$\omega = f(z_1, z_2)(dz_1 \wedge dz_2)^k$$

betrachten. Diese Begriffsbildungen machen alle auch dann Sinn, wenn S über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ definiert ist. Im folgenden verzichten wir daher auf die Annahme, daß S eine komplexe Fläche ist und arbeiten stets mit projektiven Flächen über einem Körper $k = \bar{k}$.

Das Wachstumsverhalten der Dimension $h^0(kK_S)$ in Abhängigkeit von k führt auf den grundlegenden Begriff der *Kodairadimension.*

Definition (i) *Die* Kodairadimension $\kappa(S)$ *der Fläche* S *ist wie folgt definiert:*

$$\kappa(S) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } h^0(kK_S) = 0 \quad \text{für alle } k \geq 1, \\ 0 & \text{falls } h^0(kK_S) \leq 1 \quad \text{für } k \geq 1, \text{aber nicht} \\ & \text{stets } h^0(kK_S) = 0, \\ 1 & \text{falls } h^0(kK_S) \sim k \\ 2 & \text{falls } h^0(kK_S) \sim k^2 \end{cases} .$$

(ii) *Eine Fläche* S *heißt von* allgemeinem Typ, *falls* $\kappa(S) = 2$.

Die Kodairadimension ist der zentrale Begriff für die Enriques-Klassifikation algebraischer Flächen (siehe etwa [BPV]). Offensichtlich kann die Kodairadimension in analoger Weise für Varietäten beliebiger Dimension erklärt werden, und ist entsprechend das grundlegende Hilfsmittel in der Klassifikation algebraischer Varietäten. Für eine Kurve C ergibt sich aus Formel (1) unmittelbar

$$\kappa(C) = \begin{cases} -\infty & \Leftrightarrow \quad C = \mathbb{P}^1 \\ 0 & \Leftrightarrow \quad C \text{ ist elliptisch} \\ 1 & \Leftrightarrow \quad g(C) \geq 2. \end{cases}$$

Für eine Varietät X von Dimension n ist stets $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, n\}$. Dann heißt X entsprechend von allgemeinem Typ, wenn $\kappa(X) = \dim X$ gilt.

Wir kehren nun zu den *plurikanonischen Abbildungen*

$$\varphi_k = \varphi_{kK_S} : S - - \to \mathbb{P}^N$$

zurück. Wir nehmen für das folgende an, daß S *minimal* ist, d.h. daß es auf S keine (-1) -Kurven gibt. (Da solche Kurven immer kontrahiert werden können, ist dies keine wesentliche Annahme). Dennoch treten in diesem Fall zwei Schwierigkeiten auf, die es im Fall von Kurven nicht gibt:

(1) φ_k kann Unbestimmtheitsstellen haben, d.h. in einzelnen Punkten nicht definiert sein. (Dies wird durch die Notation $- - \to$ angedeutet und liegt daran, daß eine meromorphe Funktion in einer Variablen höchstens Pole hat, während etwa die Funktion z_1/z_2 in 0 eine echte Unbestimmtheitsstelle besitzt.) Allerdings kann man dennoch über das Bild von S unter φ_k sprechen. Es gilt dann

$$\kappa(S) = \max_k \dim_{\varphi_k}(S).$$

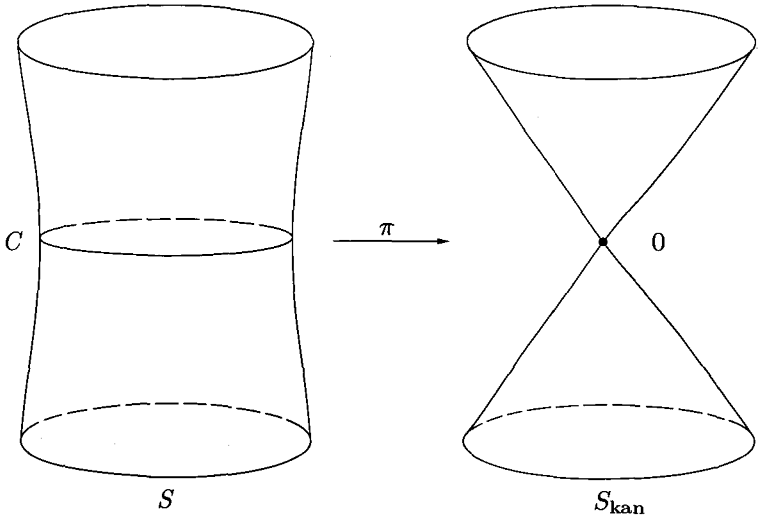
D.h. man kann lediglich im Fall von Flächen von allgemeinem Typ erwarten, daß φ_k eine Einbettung ist.

(2) Es kann auf S rationale (-2) -Kurven geben. Dies sind rationale Kurven, deren Normalenbündel den Grad (-2) hat. Solche Kurven werden unter φ_k für alle $k \geq 1$ auf einen Punkt abgebildet, d.h. φ_k kann niemals eine Einbettung sein. Allerdings kann es auf einer Fläche S nur endlich viele solcher Kurven geben. Man kann nun diese Kurven kontrahieren und erhält dann eine Abbildung

$$\pi : S \to S_{kan}.$$

Die Abbildung π ist birational. Allerdings ist S_{kan} eine *singuläre* Fläche. Die möglichen auftretenden Singularitäten sind klassifizierbar und verhalten sich gut. Hierbei treten nur *rationale Doppelpunkte* (*2-dimensionale* ADE-*Singularitäten*) auf. Die Fläche S_{kan} heißt das *kanonische Modell* der Fläche S. Im Fall einer einzigen (-2) -Kurve führt dieser Prozeß auf einen gewöhnlichen Doppelpunkt. Das zugehörige reelle

Bild kann man sich wie folgt vorstellen



Hierbei wird die (-2) -Kurve C unter π auf den singulären Punkt 0 kontrahiert.

Theorem 3 *Es sei S eine minimale Fläche von allgemeinem Typ. Für $k \geq 5$ ist die plurikanonische Abbildung $\varphi_k = \varphi_{kK_S} : S \to \mathbb{P}^N$ wohldefiniert und induziert eine Einbettung*

$$\varphi_k : S_{kan} \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

des kanonischen Modells von S.

Dieser Satz wurde zuerst 1973 von Bombieri [Bo] für den Grundkörper $k = \mathbb{C}$ bewiesen. Um 1985 entwickelte Reider [Rei] mit Hilfe von Vektorbündeltechniken ein Kriterium für sehr ample Geradenbündel, das auch für plurikanonische Abbildungen benutzt werden kann, wobei allerdings für die Doppelpunkte von S_{kan} zusätzliche Überlegungen notwendig sind. Ergebnisse für Grundkörper mit positiver Charakteristik wurden von Ekedahl [Ek] und Shepherd-Barron [S-B] zwischen 1988 und 1991 erzielt. Der obige Satz kann weiter verschärft werden, so gilt die Aussage etwa auch für $k = 4$, falls $K_S^2 \geq 2$ oder $k = 3$ falls $p_g(S) \geq 2$ und $K_S^2 \geq 3$ ist (hierbei ist K_S^2 die Selbstschnittzahl des kanonischen Divisors und $p_g(S)$ bezeichnet das geometrische Geschlecht der Fläche S).

III Ein neuer Beweiszugang

In diesem Abschnitt soll der Beweis von Theorem 3 skizziert werden, wie er in [CFHR] gegeben wurde (siehe auch [CF]). Der Vorteil dieses relativ kurzen Beweises ist, daß er in beliebiger Charakteristik funktioniert und man von Anfang an auf dem kanonischen Modell arbeiten kann. Zudem kann man neue Aussagen über die Rolle von Franciakurven bei bikanonischen Abbildungen machen (siehe [CFHR, Theorem 1.4]), auf die ich hier aber nicht näher eingehen will.

Die *Idee* besteht darin, die Einschränkung der Abbildung φ_k auf geeignete Kurven C in S_{kan} zu studieren. Ist $0 \neq \omega \in H^0(mK_S) \cong H^0(mK_{S_{kan}})$ eine m-fache 2-Form, so ist

$$C = \{\omega = 0\} \subset S_{kan}$$

eine Kurve (genauer gesagt ein *Cartierdivisor*) auf S. Dabei ist $\omega = 0$ als $f = 0$ zu verstehen, wenn $\omega = f(dz_1 \wedge dz_2)^m$ eine lokale Darstellung von ω ist. Wir sagen dann, daß C ein Element des Linearsystems $|mK_{S_{kan}}|$ ist und schreiben

$$C \in |mK_{S_{kan}}|.$$

Um zu zeigen, daß φ_k eine Einbettung ist, genügt es zu zeigen, daß φ_k injektiv ist, und auch das Differential von φ_k in jedem Punkt injektiv ist. Klassischerweise sagt man dazu, daß φ_k Punkte und Tangenten trennt. Um etwa die Injektivität zu beweisen, kann man dann wie folgt vorgehen: Es seien $P \neq Q$ zwei verschiedene Punkte auf S_{kan}. Gelingt es, eine Kurve C durch P und Q zu finden, so daß $\varphi_k|_C$ injektiv ist, so gilt offensichtlich $\varphi_k(P) \neq \varphi_k(Q)$. Analog kann man vorgehen, um Tangenten zu trennen; man muß dann eine Kurve C finden, die eine vorgegebene Tangentialrichtung in einem Punkt P hat (wobei man dies in den Doppelpunkten von S_{kan} richtig formulieren muß.) Eine mögliche Schwierigkeit in diesem Ansatz liegt darin, daß C alle Elemente des Linearsystems $|mK_{S_{kan}}|$ durchlaufen kann. Insbesondere bedeutet dies, daß C singulär, reduzibel oder sogar nicht-reduziert sein kann. Man benötigt also zunächst einen guten Einbettungssatz für möglicherweise singuläre, reduzible und nicht-reduzierte Kurven. In [CFHR] wurde die folgende Verallgemeinerung von Theorem 1 bewiesen.

Theorem 4 *Es sei C eine Kurve (d.h. ein rein 1-dimensionales projektives Schema über $k = \bar{k}$, und H ein Cartierdivisor auf C. Dann ist $\varphi_H : C \to \mathbb{P}^N$ eine Einbettung, falls für jede Unterkurve $B \subset C$, die generisch Gorenstein ist, gilt*

$$\deg(H|_B) \geq 2p(B) + 1$$

wobei $p(B)$ das (arithmetische) Geschlecht von B ist.

Beweis. Die Haupthilfsmittel sind Serre-Dualität und Grothendieck-Dualität für endliche Morphismen. Für Einzelheiten siehe [CFHR, pp. 5-8]. □

Es sei erwähnt, daß, ähnlich wie bei Theorem 1, auch noch Aussagen im Fall $\deg(H|_B) = 2p(B)$ bewiesen werden können, die aber technisch schwieriger zu formulieren sind (siehe [CFHR, Theorem 1.1]).

Beweis von Theorem 3 (Skizze). Es sei $k \geq 5$ fest. Wir untersuchen die Einschränkung von φ_k auf Kurven $C \in |(k-2)K_{S_{kan}}|$.

Schritt 1: Wir stellen zunächst fest, daß die Einschränkung

$$H^0(kK_{S_{kan}}) \to H^0(kK_{S_{kan}}|_C)$$

surjektiv ist, d.h. daß die Abbildung $\varphi_k|_C$ durch ein vollständiges Linearsystem gegeben wird. Dies folgt aus $H^1(2K_{S_{kan}}) = 0$. Im Fall $k = \mathbb{C}$ ist dies eine unmittelbare Konsequenz aus dem Verschwindungssatz von Kodaira. Im Fall $char(k) > 0$ siehe [Ek] bzw. [S-B].

Schritt 2: Als nächstes wird gezeigt, daß es genügend viele Kurven C in dem Linearsystem $|(k-2)K_{S_{kan}}|$ gibt, um Punkte und Tangenten zu trennen. Technisch gesprochen bedeutet dies, daß es für jedes vorgegebene 0-dimensionale Unterschema ζ (Cluster) der Länge 2 von S_{kan} eine Kurve $C \in |(k-2)K_{S_{kan}}|$ gibt, die ζ enthält. Dies folgt, da man mit Hilfe von Standardargumenten und Riemann-Roch leicht die Ungleichung $h^0((k-2)K_{S_{kan}}) \geq 3$ ableiten kann.

Schritt 3: Wir wollen nun zeigen, daß Theorem 4 auf alle Kurven der Form $C \in |(k-2)K_{S_{kan}}|$ angewendet werden kann. Das heißt, wir müssen sehen, daß für jede Unterkurve B (die hier automatisch generisch Gorenstein ist), die Ungleichung

$$(2) \quad \deg(kK_{S_{kan}}|_B) \geq 2p(B) + 1$$

gilt. Um das Vorgehen zu erläutern, nehmen wir zunächst an, daß S keine (-2) -Kurven enthält, daß also $S = S_{kan}$ ist. Dann genügt es (auf Grund der Adjunktionsformel), um (2) zu zeigen, einzusehen daß

$$(3) \quad B.(C-B) \geq 2$$

gilt, d.h. daß die Kurve B die residuale Kurve $C - B$ in mindestens zwei Punkten (richtig gezählt) schneidet. Wenn dies für alle Kurven $B \subset C$ gilt, so nennt man C eine 2-*zusammenhängende* Kurve. Es ist wohlbekannt und eine einfache Konsequenz des algebraischen Indexsatzes, daß auf S jede Kurve $C \in |(k-2)K_S|$ 2-zusammenhängend ist.

Betrachtet man Kurven auf der singulären Fläche $K_{S_{kan}}$, so ist (3) zu ersetzen durch die Beziehung

$$(4) \qquad \deg(K_{C|B}) - \deg \omega_B \geq 2,$$

wobei ω_B die dualisierende Garbe auf B ist. In diesem Fall spricht man von *numerisch 2-zusammenhängend.* Analog kann man den Begriff numerisch m-zusammenhängend definieren.

Schritt 4: Es bleibt zu zeigen, daß jede Kurve $C \in |(k-2)K_{S_{kan}}|$ numerisch 2-zusammenhängend ist. Dies folgt aus der entsprechenden Aussage auf S und dem

Lemma 5 *Es sei X eine Fläche mit rationalen Doppelpunkten und $\pi : \tilde{X} \to X$ die minimale Auflösung. Ist $C \subset X$ ein effektiver Cartierdivisor und $C^* = \pi^* C$ das totale Urbild von C, so gilt: Ist C^* numerisch m-zusammenhängend, dann auch C.*

Beweis. [CFHR, pp. 14, 15]. □

Dies beendet den Beweis von Theorem 3.

Literatur

[BPV] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven "*Compact complex surfaces*", Springer (1984).

[Bo] E. Bombieri, "*Canonical models of surfaces of general type*", Publ. Math. IHES **42** (1973), 171–219.

[CF] F. Catanese and M. Franciosi, "*Divisors of small genus on algebraic surfaces and projective embeddings*", Proceedings of the conference "Hirzebruch 65", Tel Aviv 1993, Contemp. Math., A.M.S. (1994), subseries 'Israel Mathematical Conference Proceedings' Vol. **9**, (1996) 109–140.

[CFHR] F. Catanese, M. Franciosi, K. Hulek, M. Reid, "*Embeddings of curves and surfaces*" Preprint 32 pp.

[Ek] T. Ekedahl, "*Canonical models of surfaces of general type in positive characteristic*", Publ. Math. IHES **67** (1988), 97–144.

[Ha] R. Hartshorne, "*Algebraic Geometry*", Springer (1977).

[Rei] I. Reider, "*Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*", Ann. of Math. **127**(1988), 309–316.

[Se1] J-P. Serre, "*Faisceaux algébriques cohérents*", Ann. of Math. **61** (1955), 197–278.

[S-B] N. I. Shepherd-Barron, "*Unstable vector bundles and linear systems on surfaces in characteristic p*", Invent. Math. **106** (1991), 243–262.

Klaus Hulek,
Institut für Mathematik, Univ. Hannover,
Postfach 6009, D–30060 Hannover (Germany)
E-mail address: hulek@math.uni-hannover.de